Exercice 1 – Corrigé

Question

Soit A une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels telle que sa forme échelonnée réduite contient exactement k lignes nulles. Déterminer le rang de A et de A^T, ainsi que la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Ker}(A^T)$ en fonction de m, n et k.

Solution.

Analyser. Il s'agit de déterminer le rang des matrices A et A^T, ainsi que de la dimension des sous-espace vectoriels $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^T)$.

Lister. Il faut penser à se rappeler comment calculer le rang d'une matrice A, et le lien avec le rang de la matrice transposée A^T. Il faut aussi se rappeler que le Théorème du Rang met en relation le rang d'une matrice B avec la dimension de $\mathrm{Ker}(B)$.

Résoudre. Soit $R \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ la forme échelonnée réduite associée à la matrice A.

Comme par hypothèse R contient exactement k lignes nulles, nous avons

$$\mathrm{rang}(R) = m - k\,.$$

Étant donné que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(R)$, nous avons donc

$$\mathrm{rang}(A) = m - k\,.$$

En outre, comme $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T)$, on a aussi

$$\mathrm{rang}(A^T) = m - k\,.$$

D'autre part, le théorème du rang nous donne

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) + \mathrm{rang}(A) = n\,,$$

et

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A^T)\big) + \mathrm{rang}(A^T) = m\,,$$

Par conséquent,

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = n - \mathrm{rang}(A) = n - (m-k)\,.$$
$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A^T)\big) = m - \mathrm{rang}(A^T) = m - (m-k) = k\,.$$

La dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ est ainsi

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = n - m + k$$

et la dimension de $\mathrm{Ker}(A^T)$ est

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A^T)\big) = k\,.$$